第 31 講　関数総合(2)

1 [1]　$0 \leqq \theta < \pi$ のとき，方程式 $\cos 4\theta - 2\cos 3\theta + \cos 2\theta = 0$ を解け.

[2]　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $1 + \cos\theta + \cos 2\theta > \sin\theta + \sin 2\theta$ を満たす θ の値の範囲を求めよ.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，関数 $y=(2\sin\theta-3\cos\theta)^2-(2\sin\theta-3\cos\theta)+1$ の最大値 M と最小値 m を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　関数 $f(x)=2\sin^2 x+4\sin x+3\cos 2x$ について，以下の問いに答えよ．ただし，$0\leqq x<2\pi$ である．

(1)　$t=\sin x$ とするとき，$f(x)$ を t の式で表せ.

(2)　$f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの x の値をすべて求めよ.

(3)　方程式 $f(x)=a$ の相異なる解が 4 個であるような実数 a の値の範囲を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 31 講　関数総合(2)

[1]　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，関数 $y=(2\cos\theta+\sin\theta)^2$ の最大値は **ア** ，最小値は **イ** である．

[2]　a の実数とする．方程式 $\sin^2 x+2a\sin x+a-4=0$ ……① が $0 \leqq x < 2\pi$ の範囲に解を 1 つだけもつときの a の値を求めたい．$\sin x=t$ とおくと，t のとり得る値の範囲は $-$ **ウ** $\leqq t \leqq$ **エ** である．$-$ ウ $< t <$ エ である t に対し，$0 \leqq x < 2\pi$ を満たす x は **オ** 個存在し，$t=-$ ウ または $t=$ エ に対しては $0 \leqq x < 2\pi$ を満たす x は **カ** 個存在する．

　したがって，方程式 $t^2+2at+a-4=0$ が $t=-$ ウ または $t=$ エ を解にもつときを考えると，$a=-$ **キ** ， **ク** のときである．いずれの場合も，もう 1 解は $-$ ウ $\leqq t \leqq$ エ になく題意を満たす．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第31講　関数総合(2)

1 [1]　$0 \leqq \theta < \pi$ のとき，方程式 $\cos 4\theta - 2\cos 3\theta + \cos 2\theta = 0$ を解け．

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$\cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1 = 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1 = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

したがって　$\cos 4\theta - 2\cos 3\theta + \cos 2\theta = 0$ は次のように変形できる

$8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1 - 2(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) + 2\cos^2\theta - 1 = 0$

$4\cos^4\theta - 4\cos^3\theta - 3\cos^2\theta + 3\cos\theta = 0$

$\cos\theta(4\cos^3\theta - 4\cos^2\theta - 3\cos\theta + 3) = 0$

$\cos\theta(\cos\theta - 1)(4\cos^2\theta - 3) = 0$

よって　$\cos\theta = 0,\ 1,\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq \theta < \pi$　より　$\boldsymbol{\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi}$

1 [2]　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $1 + \cos\theta + \cos 2\theta > \sin\theta + \sin 2\theta$ を満たす θ の値の範囲を求めよ．

$1 + \cos\theta + \cos 2\theta > \sin\theta + \sin 2\theta$

$1 + \cos\theta + 2\cos^2\theta - 1 > \sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta$

$(2\cos\theta + 1)\sin\theta - 2\cos^2\theta - \cos\theta < 0$

$(2\cos\theta + 1)\sin\theta - \cos\theta(2\cos\theta + 1) < 0$

$(2\cos\theta + 1)(\sin\theta - \cos\theta) < 0$

したがって　$2\cos\theta + 1 > 0$　かつ　$\sin\theta - \cos\theta < 0$　……①

または　$2\cos\theta + 1 < 0$　かつ　$\sin\theta - \cos\theta > 0$　……②

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のもとで

①のとき　$\cos\theta > -\dfrac{1}{2}$ かつ $\sin\theta < \cos\theta$　より

$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{4}{3}\pi < \theta < 2\pi$

②のとき　$\cos\theta < -\dfrac{1}{2}$ かつ $\sin\theta > \cos\theta$　より

$\dfrac{2}{3}\pi < \theta < \dfrac{5}{4}\pi$

以上より　$\boldsymbol{0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{2}{3}\pi < \theta < \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi < \theta < 2\pi}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，関数 $y=(2\sin\theta-3\cos\theta)^2-(2\sin\theta-3\cos\theta)+1$ の最大値 M と最小値 m を求めよ．

$t=2\sin\theta-3\cos\theta$ とおくと

$t=\sqrt{13}\sin(\theta-\alpha)$　　ただし α は　$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$ を満たす鋭角.

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より　$-\alpha \leqq \theta-\alpha \leqq \pi-\alpha$

よって　$\theta-\alpha=\dfrac{\pi}{2}$　つまり $\theta=\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ のとき

t は最大値 $\sqrt{13}\times 1=\sqrt{13}$ をとり，

$\theta-\alpha=-\alpha$　つまり $\theta=0$ のとき

t は最小値 $\sqrt{13}\times\left(-\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)=-3$ をとる.

このとき　$y=(2\sin\theta-3\cos\theta)^2-(2\sin\theta-3\cos\theta)+1$

$=t^2-t+1=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$　$(-3 \leqq t \leqq \sqrt{13})$ より

$t=-3$ のとき　最大値 $\boldsymbol{M=13}$　　$t=\dfrac{1}{2}$ のとき　最小値 $\boldsymbol{m=\dfrac{3}{4}}$ をとる.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

[3] 関数 $f(x)=2\sin^2 x+4\sin x+3\cos 2x$ について，以下の問いに答えよ．ただし，$0\leqq x<2\pi$ である．

(1) $t=\sin x$ とするとき，$f(x)$ を t の式で表せ．

(2) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの x の値をすべて求めよ．

(3) 方程式 $f(x)=a$ の相異なる解が 4 個であるような実数 a の値の範囲を求めよ．

(1) $f(x)=2\sin^2 x+4\sin x+3\cos 2x$

$=2\sin^2 x+4\sin x+3(1-2\sin^2 x)=-4\sin^2 x+4\sin x+3$

よって　$t=\sin x$ のとき　$\boldsymbol{f(x)=-4t^2+4t+3}$

(2) $f(x)=-4t^2+4t+3=-4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+4=g(t)$ とおくと

$0\leqq x<2\pi$　より　$-1\leqq t\leqq 1$

よって　$t=\frac{1}{2}$ のとき　$g(t)$ は最大値 $g\left(\frac{1}{2}\right)=4$

$t=-1$ のとき　$g(t)$ は最小値 $g(-1)=-5$ をとる．

したがって　$f(t)$ の**最大値は 4**　$\left(\boldsymbol{x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi}\ \textbf{のとき}\right)$

最小値は -5　$\left(\boldsymbol{x=\frac{3}{2}\pi}\ \textbf{のとき}\right)$

(3) $f(x)=a$　より　$-4t^2+4t+3=a$

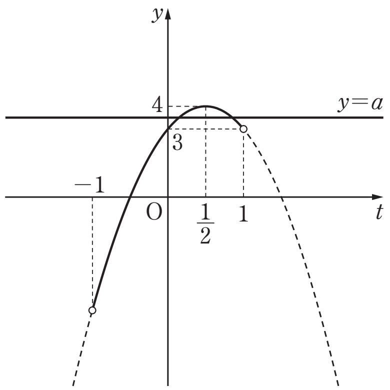
ここで，$-1<t<1$ である t の値 1 つにつき，x は $0\leqq x<2\pi$ の範囲に 2 つ存在し，

$t=\pm 1$ である t の値 1 つにつき，x は $0\leqq x<2\pi$ の範囲に 1 つ存在する．

よって $f(x)=a$ の相異なる解が 4 個であるのは，

$y=g(t)$ のグラフと $y=a$ のグラフが $-1<t<1$ の範囲に異なる 2 つの共有点をもつときである．

右図より求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{3<a<4}$



©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第31講　関数総合(2)

［1］　$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，関数 $y=(2\cos\theta+\sin\theta)^2$ の最大値は［ア］，最小値は［イ］である．

［2］　a の実数とする．方程式 $\sin^2 x+2a\sin x+a-4=0$ ……① が $0\leqq x<2\pi$ の範囲に解を1つだけもつときの a の値を求めたい．$\sin x=t$ とおくと，t のとり得る値の範囲は $-$［ウ］$\leqq t\leqq$［エ］である．$-$［ウ］$<t<$［エ］である t に対し，$0\leqq x<2\pi$ を満たす x は［オ］個存在し，$t=-$［ウ］または $t=$［エ］に対しては $0\leqq x<2\pi$ を満たす x は［カ］個存在する．

したがって，方程式 $t^2+2at+a-4=0$ が $t=-$［ウ］または $t=$［エ］を解にもつときを考えると，$a=-$［キ］，［ク］のときである．いずれの場合も，もう1解は $-$［ウ］$\leqq t\leqq$［エ］になく題意を満たす．

解答例

［1］　$t=2\cos\theta+\sin\theta$ とおくと　$t=\sin\theta+2\cos\theta=\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)$

ただし α は $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ を満たす鋭角．

$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき　$\alpha\leqq\theta+\alpha\leqq\pi+\alpha$ より，t は

$\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$　つまり　$\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ のとき　最大値 $\sqrt{5}$

$\theta+\alpha=\pi+\alpha$　つまり　$\theta=\pi$ のとき　最小値 -2 をとる．

このとき　$y=(2\cos\theta+\sin\theta)^2=t^2$　$(-2\leqq t\leqq\sqrt{5})$ より

求める関数の最大値は　**5**　($t=\sqrt{5}$ のとき)　　最小値は　**0**　($t=0$ のとき)

［2］　$\sin x=t$ とおくと，$0\leqq x<2\pi$ より $-\mathbf{1}\leqq t\leqq\mathbf{1}$

$-1<t<1$ である t に対して　x は $0\leqq x<2\pi$ に **2** 個存在し，

$t=-1$ または $t=1$ に対して　x は $0\leqq x<2\pi$ に **1** 個存在する．

よって①が $0\leqq x<2\pi$ の範囲に解を1つだけもつのは，方程式 $t^2+2at+a-4=0$ …②の1解が $t=-1$ または $t=1$，もう1解が $-1\leqq t\leqq1$ にない場合である．

$t=-1$ を解にもつとき　$a=-\mathbf{3}$

このとき②は $t^2-6t-7=0$ より　もう1解は $t=7$

$t=1$ を解にもつとき　$a=\mathbf{1}$

このとき②は $t^2+2t-3=0$ より　もう1解は $t=-3$

いずれの場合も，もう1解は $-1\leqq t\leqq1$ になく題意を満たす．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。